Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03
Università di Roma “La Sapienza”

Note per il corso

Analisi Matematica I

Parte II: Integrali impropri, Successioni di funzioni

scritte ad otto mani da
P. D’Ancona, C. Mascia, V. Nesi & L. Orsina

CAPITOLO 3

Integrali impropri

`Versione del 14 marzo 2003`

1. Dai primi esempi alla definizione

Fin qui sappiamo che senso dire che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è *integrabile*. E' esperienza quotidiana (?) confrontarsi col problema di dare senso all'integrale definito anche in situazioni più generali. In particolare, si vorrebbero rimuovere le ipotesi di:

(i) $[a,b]$ intervallo limitato;

(ii) f funzione limitata.

Rimuovendo (i) e/o (ii) si passa da una situazione in cui il grafico di f è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$, ad una in cui il grafico di f è illimitato.

Ad esempio, si vorrebbe dare un significato opportuno a espressioni del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

(sapete riconoscere perché nessuno di questi integrali rientra nella definizione di integrale di Riemann già vista in precedenza?). Oppure si potrebbe desiderare dare senso alla parola "area" di regioni illimitate del piano delimitate dall'asse x e il grafico di una funzione positiva: ad esempio, ha senso parlare dell'area delimitata dal ramo dell'iperbole di equazione $xy = 1$ che si trova nel primo quadrante e dalle semirette $\{(x,y) : x \geq 0\}$ e $\{(x,y) : y \geq 0\}$? Come comportarsi? Partiamo da due esempi semplici.

Esempio 1.1. Dato $\alpha > 0$, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \in (0,1].$$

Dato che la funzione f non è limitata in $(0,1]$ non è possibile definire istantaneamente il suo integrale definito. Il problema è legato al (cattivo) comportamento della funzione f nel punto $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty.$$

Se consideriamo la restrizione della funzione all'intervallo $[\varepsilon, 1]$, dove $\varepsilon \in (0,1)$, l'integrale definito ha senso e vale:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) & \text{se } \alpha \neq 1, \\ -\ln \varepsilon & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

A questo punto, è più che ragionevole far tendere $\varepsilon \to 0^+$ (Fig.1(a)), ottenendo

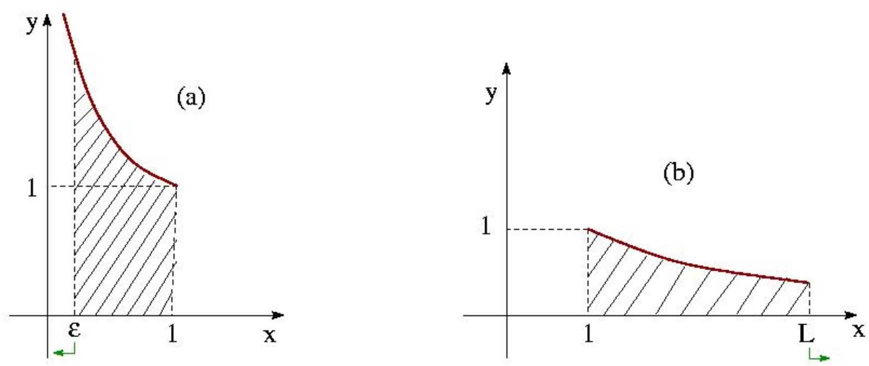

FIGURA 1. L'area della zona tratteggiata è: (a) $\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,dx$; (b) $\int_1^L x^{-\alpha}\,dx$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Alla luce di questo risultato, è naturale dire che la funzione $x^{-\alpha}$ è *integrabile* in $(0,1]$ se $\alpha < 1$, e non lo è se $\alpha \geq 1$.

ESEMPIO 1.2. Dato $\alpha > 0$, consideriamo la stessa funzione in un insieme diverso

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad x \in [1, +\infty).$$

Il problema della singolarità in $x = 0$ non appare, dato che stiamo considerando la funzione per $x \geq 1$. Anche in questo caso, però, non è possibile definire l'integrale nel senso classico, dato che l'insieme di definizione è un intervallo <u>illimitato</u>. Nello stesso spirito dell'esempio precedente, riconduciamoci ad una situazione in cui l'integrale abbia senso e poi passiamo al limite. Dato $L > 1$,

$$\int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(L^{1-\alpha}-1\right) & \text{se } \alpha \neq 1, \\ \ln L & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Passando al limite per $L \to +\infty$ (Fig.1(b)),

$$\lim_{L\to+\infty}\int_1^L \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \le 1. \end{cases}$$

Esattamente come nel caso di prima, è naturale affermare che $x^{-\alpha}$ è *integrabile* in $[1,+\infty)$ se $\alpha > 1$ e non lo è se $\alpha \le 1$.

L'idea nella definizione dell'integrale improprio è tutta qui: rincondursi ad un integrale in senso classico e poi passare al limite. Nel caso in cui il limite esista finito, la funzione si dirà *integrabile* (nell'insieme considerato), nel caso in cui il limite non esista o esista, ma valga $+\infty$ o $-\infty$ la funzione si dirà *non integrabile.* L'idea è sostanzialmente la stessa che ispira la definizione di sommabilità di una serie: ci si riconduce ad un oggetto ben definito (la somma di un numero finito di termini) e poi si passa al limite.

Definizione 1.3. *Sia* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in* $[c,b]$ *per ogni* $c \in (a,b)$. *La funzione* f *si dice* INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $(a,b]$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx,$$

*il valore del limite è l'*INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN $(a,b]$.

Analogamente, sia $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in* $[a,L]$ *per ogni* $L > a$. *La funzione* f *è* INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a,+\infty)$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{L\to+\infty}\int_a^L f(x)\,dx =: \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

*e il valore del limite è l'*INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN $[a,+\infty)$.

Chiaramente nel caso di una funzione definita in $[a,b)$ e integrabile in $[a,c]$ per ogni $c \in (a,b)$, l'integrale improprio è definito tramite il limite

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx,$$

e nel caso di $f : (-\infty,b] \to \mathbb{R}$, integrabile in $[L,b]$ per ogni $L < b$ tramite

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{L\to-\infty}\int_L^b f(x)\,dx.$$

Esempio 1.4. La funzione $f(x) = e^{-x}$ essendo continua su $\mathbb{R}$ è anche integrabile in $[a,b]$ per ogni $a,b \in \mathbb{R}$. Dato $a \in \mathbb{R}$, f è integrabile in senso improprio in $[a,+\infty)$? E in $(-\infty,a]$? La risposta è SI nel primo caso e NO nel secondo: infatti

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_a^L e^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty} -e^{-x}\Big|_{x=a}^{L} = \lim_{L\to+\infty} e^{-a} - e^{-L} = e^{-a},$$

mentre

$$\int_{-\infty}^{a} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty}\int_{L}^{a} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty} -e^{-x}\Big|_{x=L}^{a} = \lim_{L\to-\infty} e^{-L} - e^{-a} = +\infty.$$

La situazione è la stessa nel caso della funzione $f(x) = xe^{-x}$: infatti,

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + \text{costante},$$

e dunque

$$\int_{a}^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_{a}^{L} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}(a+1)e^{-a} - (L+1)e^{-L} = (a+1)e^{-a},$$

$$\int_{-\infty}^{a} xe^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty}\int_{L}^{a} e^{-x}\,dx = \lim_{L\to-\infty}(L+1)e^{-L} - (a+1)e^{-a} = +\infty,$$

avendo utilizzato il limite $\lim_{L\to+\infty} Le^{-L} = 0$.

In generale, può capitare che la funzione f non sia definita in entrambi gli estremi dell'intervallo, oppure non sia definita in uno o più punti interni, o che si desideri integrare su tutta la retta reale $\mathbb{R}$, o che alcune di queste situazioni appaiano combinate tra loro. Ad esempio, che senso dare all'integrabilità della funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ in $(0, +\infty)$? L'idea è sempre la stessa: calcolare l'integrale in un sottointervallo limitato e poi avvicinarsi, tramite un'operazione di limite, all'intervallo desiderato. In questo caso, scegliamo $0 < \varepsilon < L < +\infty$ e consideriamo l'integrale definito

$$\int_{\varepsilon}^{L} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\left(L^{\alpha-1} - \varepsilon^{\alpha-1}\right).$$

Ora si tratta di passare al limite: $\varepsilon \to 0^+$ e $L \to +\infty$. Ma... in che ordine dobbiamo passare al limite? Prima ε o prima L? O, in qualche modo, tutti e due contemporaneamente? *Dichiariamo che la funzione è integrabile in senso improprio, se il risultato è indipendente dall'ordine con cui si fanno i limiti.* La maniera più semplice per formalizzare in modo preciso questa definizione è richiedere che i seguenti due limiti esistano separatamente

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{x_0}\frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{L\to+\infty}\int_{x_0}^{L}\frac{dx}{x^{\alpha}},$$

dove x_0 è un qualsiasi numero fissato in $(0, +\infty)$ (ad esempio, $x_0 = 1$).

Definizione 1.5. *Sia $-\infty \le a < b \le +\infty$ e $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in $[c,d]$ per ogni $[c,d] \subset (a,b)$. La funzione f è* INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN (a,b) *se esistono finiti i limiti*

$$\ell_- := \lim_{c\to a^+}\int_{c}^{x_0} f(x)\,dx \qquad e \qquad \ell_+ := \lim_{d\to b^-}\int_{x_0}^{d} f(x)\,dx,$$

*per un qualsiasi $x_0 \in (a,b)$. In tal caso, l'*INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN (a,b) *è dato da*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \ell_- + \ell_+.$$

Esempio 1.6. Domandiamoci se la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)$$

è integrabile in $(-1,1)$. Come detto, basta scegliere un qualsiasi punto $x_0 \in (-1,1)$ e studiare l'integrabilità di f in $(-1,x_0]$ e $[x_0,1)$. Scegliamo ad esempio $x_0 = 0$,

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1^+} \int_{c}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1^+} \arcsin 0 - \arcsin c = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \int_{0}^{c} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1^-} \arcsin c - \arcsin 0 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Dato che entrambi gli integrali sono convergenti, la funzione è integrabile in senso improprio e l'integrale vale

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Esempio 1.7. Consideriamo ora l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

Esiste o non esiste? Con il cambio di variabile $x = t^2$, si deduce che

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} &= \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + \text{costante} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \text{costante}\end{aligned}$$

Quindi, scegliendo $x_0 = 1/2$, si ha

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^{1/2} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1/2}}{1-\sqrt{1/2}}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\lim_{c\to 1^-} \int_{1/2}^{c} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} = \lim_{c\to 1^-} \ln\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right) - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1/2}}{1-\sqrt{1/2}}\right) = +\infty.$$

Dato che il secondo limite è divergente, la funzione non è integrabile in $(0,1)$.

Nel caso di una funzione f definita su $\mathbb{R}$ e integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, l'integrabilità in senso improprio su $\mathbb{R}$ equivale a dire che esistono finiti i limiti

$$\lim_{L\to -\infty} \int_L^{x_0} f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{M\to +\infty} \int_{x_0}^{M} f(x)\,dx,$$

dove x_0 è un qualsiasi numero reale. In caso affermativo, l'integrale di f su $\mathbb{R}$ vale

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{L\to -\infty} \int_L^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{M\to +\infty} \int_{x_0}^{M} f(x)\,dx.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Scegliendo $x_0 = 0$ e sapendo che una primitiva di $1/(1+x^2)$ è la funzione $\arctan x$,

$$\lim_{L\to-\infty} \int_L^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{L\to-\infty} -\arctan(-L) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to+\infty} \arctan M = \frac{\pi}{2},$$

quindi che la funzione è integrabile su $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ancora più in generale se una funzione f è definita in un insieme A che è unione <u>finita</u> di intervalli disgiunti della forma $(a, b]$, $[a, b)$ o (a, b) con $-\infty \le a < b \le +\infty$, per dare senso all'integrabilità in senso improprio, si sceglie il seguente procedimento:

– si suddivide l'insieme A (limitato o illimitato) in un numero <u>finito</u> di <u>intervalli</u>, in ciascuno dei quali il problema dell'integrabilità sia presente o in Definizione 1.3 o in Definizione 1.5;

– se **tutti** gli integrali impropri esistono, la funzione è integrabile in senso improprio nell'insieme di partenza e l'integrale improprio è la somma degli integrali nei singoli intervalli;

– se uno (o più) degli integrali nei sottointervalli non esiste o esiste, ma non è finito, la funzione <u>non</u> è integrabile in senso improprio.

Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \qquad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

L'insieme di definizione va rappresentato come unione di due intervalli disgiunti:

$$[-1, 1] \setminus \{0\} = [-1, 0) \cup (1, 0].$$

Per definizione, f è integrabile in $[-1, 1] \setminus \{0\}$ se e solo se lo è in $[-1, 0)$ e in $(0, 1]$. Dato che valgono

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}\, dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} 1 - \varepsilon^{1/2} = 1$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\delta\to0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = \lim_{\delta\to0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{1}{2}\, x^{-1/2}\, dx = \lim_{\delta\to0^+} 1 - \delta^{1/2} = 1,$$

la funzione è integrabile in senso improprio in $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} := \int_{-1}^{0} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{|x|}} = 1 + 1 = 2.$$

Esercizio 1.8. *Dato $\alpha > 0$, in quali insiemi è integrabile la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x|\ln x|^\alpha} \qquad x \in (0,+\infty) \setminus \{1\} \qquad ?$$

Qui i problemi sono tre: i punti $x = 0$ e $x = 1$ in cui la funzione non è definita (e tende a $+\infty$) e il dominio illimitato. Il problema va spezzato quindi nel calcolo di quattro limiti diversi da calcolare:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}, \qquad \lim_{L\to +\infty} \int_{2}^{L} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}.$$

La scelta di $1/2$ e 2 è del tutto arbitraria, si sarebbe potuto scegliere un qualsiasi valore in $(0,1)$ e in $(1,+\infty)$, rispettivamente. E' importante sottolineare che il punto di singolarità $x = 1$ comporta lo studio di due integrali impropri, uno a destra di $x = 1$ e l'altro a sinistra.

Integrale in $(0, 1/2)$**.** Nel primo intervallo, ponendo $t = -\ln x$, si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\ln 2}^{-\ln\varepsilon} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Per $\varepsilon \to 0^+$, $-\ln\varepsilon$ tende a $+\infty$, quindi il limite esiste finito se e solo se $\alpha > 1$ (si riveda l'esempio ad inizio capitolo).

Integrale in $(1/2, 1)$**.** Con la stessa sostituzione $t = -\ln x$ di prima,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\ln(1-\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Questa volta, per $\varepsilon \to 0$, $-\ln(1-\varepsilon)$ tende a zero, quindi il limite esiste finito se e solo se $\alpha < 1$.

Integrale in $(1, 2)$**.** Utilizziamo in questo caso la sostituzione $t = \ln x$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{2} \frac{dt}{t^\alpha},$$

e dato che $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(1+\varepsilon) = 0$, il limite esiste finito se e solo se $\alpha < 1$.

Integrale in $(2, +\infty)$**.** Con la stessa sostituzione del caso precedente, si ha

$$\lim_{L\to +\infty} \int_{2}^{L} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha} = \lim_{L\to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dt}{t^\alpha},$$

e quindi c'è integrabilità se e solo se $\alpha > 1$.

Lo schema in Figura 2 riassume i valori di α e i relativi insiemi di integrabilità in senso improprio. Come si vede, indicando con $x_1 \in (0,1)$ e $x_2 \in (1,+\infty)$ scelti arbitrariamente, se

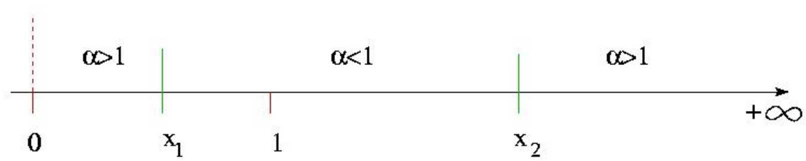

Figura 2.

$0 < \alpha < 1$, la funzione è integrabile in senso improprio in $(0, x_1]$ e in $[x_2, +\infty)$ per ogni scelta di $x_1 \in (0, 1)$ e $x_2 \in (1, +\infty)$; invece, se $\alpha > 1$, la funzione è integrabile in senso improprio in $[x_1, x_2]$.

Nel caso in cui la definizione di integrale improprio preveda il calcolo di più di un limite è fondamentale che ogni limite venga calcolato separatamente, suddividendo l'insieme di integrazione in sottointervalli in cui sia necessario un solo limite. Il seguente esempio di procedimento, che non segue le regole di integrazione impropria, è istruttivo:

> il signor Lafcadio, per pura questione di tempo, decise di calcolare l'integrabilità in senso improprio di $1/x$ in $(-1, 1) \setminus \{0\}$ senza dividere il problema nell'integrabilità nei due intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Fu una scelta azzardata di cui pagò le amare conseguenze. Ecco il suo procedimento:
>
> $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln|x|\big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\big|_{\varepsilon}^{1} \right)$$
> $$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln|-\varepsilon| + \ln|\varepsilon| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 0 = 0,$$
>
> da cui concluse che la funzione era integrabile e che il suo integrale era nullo. Ma la verità era un'altra: dato che
>
> $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln|x|\big|_{x=\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln|\varepsilon| = +\infty,$$
>
> la funzione non è integrabile in senso improprio in $(0, 1)$.
>
> In effetti, l'integrazione impropria richiede che i limiti a destra e sinistra del punto di singolarità $x = 0$ siano fatti in maniera indipendente, e cioè come segue:
>
> $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln|\varepsilon| + \lim_{\delta \to 0^+} \ln|\delta|.$$
>
> L'integrabilità corrisponde all'esistenza di entrambi i limiti separatamente. Lafcadio con la scelta $\delta = \varepsilon$, senza saperlo, stava utilizzando il procedimento con cui si definisce il *valore principale* (nel senso di Cauchy) di un integrale. Oggetto di cui non parleremo, che è comunque ben diverso dall'integrale improprio.

2. Funzioni positive

Nel caso delle serie, se tutti i termini a_k sono positivi, la successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è una successione non decresente e pertanto o converge o diverge a $+\infty$. Non è possibile che compaiano oscillazioni. Lo stesso avviene parlando di integrali impropri: se la funzione integranda f è non negativa, cioè $f(x) \geq 0$ per ogni x, il limite che compare nella definizione dell'integrale improprio o converge o diverge a $+\infty$. Consideriamo una funzione $f : [a, +\infty)$ integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. L'esistenza dell'integrale improprio di f in $[a, +\infty)$ equivale all'esistenza del limite

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L) \qquad \text{dove} \qquad \Phi(L) = \int_a^L f(x)\, dx. \tag{2.1}$$

Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq a$, allora la funzione Φ è non decrescente: infatti

$$f \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(L_2) - \Phi(L_1) = \int_{L_1}^{L_2} f(x)\, dx \geq 0 \qquad \text{se} \quad L_1 < L_2.$$

Pertanto il limite in (2.1) esiste sempre e vale

$$\lim_{L\to+\infty} \Phi(L) = \sup_{x\geq a} \Phi(x).$$

La funzione f è integrabile se e solo se $\sup_{x\geq a} \Phi(x)$ è finito. In questo caso, per esprimere che la funzione f è o non è integrabile in $[a, +\infty)$ basta scrivere, rispettivamente,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty.$$

Inoltre il valore dell'integrale improprio ha un significato geometrico importante: rappresenta l'area della regione di piano <u>non limitata</u>, che è compresa tra il grafico della funzione f, la semiretta $\{x \geq a,\, y = 0\}$ e il segmento di estremi $(a, 0)$ e $(f(a), 0)$. L'esistenza dell'integrale improprio si traduce nel fatto che l'area di questa regione è finita.

Ragionamenti analoghi possono essere fatti nel caso dell'integrale improprio in intervalli limitati.

Esercizio 2.1. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ non negativa integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b < +\infty$. Dimostrare che vale l'uguaglianza*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \sup\left\{ \int_c^d f(x)\, dx \,:\, a \leq c < d < +\infty \right\}.$$

Come nel caso delle serie a termini positivi, è possibile introdurre per funzioni positive un *criterio del confronto*, estremamente utile per stabilire se un integrale improprio sia convergente. Il principio è semplice: se il grafico di una funzione positiva giace sopra quello di una funzione non integrabile, anche lei non è integrabile; se invece giace sotto quello di una funzione integrabile è essa stessa integrabile.

Nell'enunciato che segue b può rappresentare sia un numero reale che il simbolo $+\infty$.

Teorema 2.2. *(Criterio del confronto) Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[a, c]$ per ogni $c \in (a, b)$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$. Allora valgono le implicazioni*

$$\textit{se} \quad \int_a^b f(x)\, dx = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b g(x)\, dx = +\infty;$$

$$\textit{se} \quad \int_a^b g(x)\, dx < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\, dx < +\infty$$

Nel secondo caso, vale anche la stima

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tanto per gradire qualche esempio facile facile. Con tranquillità e sicurezza, affermo ad alta voce:

$$\text{“l'integrale improprio} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \qquad \text{esiste finito.”}$$

Giustamente un passante che si trovava da quelle parti per puro caso, sente la mia frase e rimane perplesso, vorrebbe una spiegazione. Mi industrio per fornirgliela. Utilizzare direttamente la definizione di integrabilità in senso improprio, richiederebbe il calcolo dell'integrale

$$\int_1^L \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \qquad L > 1.$$

Ma l'impresa è proibitiva: trovare una primitiva di $|\cos x|/x^2$ non è cosa da poco, probabilmente al limite dell'impossibile. Utilizzando il Teorema 2.2 posso comunque giustificare la mia affermazione, infatti:

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \ge 1$$

e dato che la funzione $1/x^2$ è tale che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 < +\infty,$$

anche la funzione $|\cos x|/x^2$ ha integrale improprio convergente in $[1, +\infty)$. Il signore ha seguito il ragionamento con interesse ed attenzione e si è convinto che effettivamente non avevo detto una cosa tanto per aprire bocca, ma, al contrario, per affermare una indiscutibile verità. Ora è lui a rilanciare: “va bene, ora che sappiamo che l'integrale esiste finito... quanto vale?” Mestamente devo confessare di non essere in grado di fornire una risposta: il criterio di confronto permette infatti di stabilire l'esistenza o meno di integrali impropri, ma non fornisce un metodo di calcolo del loro valore nel caso in cui siano convergenti. Anche qui, la situazione è esattamente la stessa delle serie numeriche, per cui è molto più semplice determinare la convergenza o la divergenza, ma estremamente più complicato calcolarne il valore della somma. L'unica cosa che riesco ad affermare è una stima dall'alto:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Esercizio 2.3. *Stabilire se il seguente integrale improprio converge o diverge*

$$\int_0^1 \frac{1 + e^x}{x}\,dx.$$

L'integrale è chiaramente divergente! Infatti

$$\frac{1 + e^x}{x} \ge \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0, 1],$$

e la funzione $1/x$ non è integrabile in $(0,1]$.

> A conclusione raggiunta, è auspicabile che qualcuno mi domandi: "come ti è venuto in mente di minorare eliminando il termine e^x?" Oppure "in questo caso la struttura della funzione integranda è particolarmente semplice, ma in situazioni più complicate come ci si può comportare? Quale voce dal cielo può suggerirmi una stima che mi permetta di giungere ad una conclusione?" Vediamo prima una maniera di ragionare in questo caso, per poi enunciare un paio di risultati di confronto asintotico. Il problema nella determinazione dell'integrabilità di $(1+e^x)/x$ in $(0,1]$ è legato al fatto che la funzione diverge a $+\infty$ per $x \to 0^+$, tanto vale guardare la funzione in un intorno di quel punto:
>
> $$\frac{1+e^x}{x} \approx \frac{1+1}{x} = \frac{2}{x} \qquad \text{per} \quad x \to 0.$$
>
> La funzione $2/x$ non è integrabile in $(0,1]$ (l'aver moltiplicato per 2 la funzione $1/x$ non ne cambia il carattere di non integrabilità!). Allora il sospetto è che la funzione non sia integrabile in $(0,1]$. Che fare? Beh... orientarsi per l'uso della prima parte del Teorema 2.2, cioè cercare una stima dal basso con una funzione il cui integrale improprio sia divergente. Quindi: (i) conservare il termine x a denominatore (l'unico che può causa la divergenza dell'integrale), (ii) eliminare il termine e^x grazie al fatto che è positivo (ho eliminato il termine più "complicato": una funzione trascendente!).

Nel tentativo di spiegazione della soluzione ci sono due aspetti. Uno è "contingente": ogni esercizio/esempio fa storia a sé, ha delle sue peculiarità proprie e solo vedere molti esempi aumenta l'esperienza ed esercita a trovare strade migliori. L'altro aspetto, invece, è generale: l'integrabilità in senso improprio dipende solo dal comportamento della funzione in considerazione in un intorno del punto di singolarità.

Teorema 2.4. *(Criterio del confronto asintotico – I parte) Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili in $[a,c]$ per ogni $c \in (a,b)$ e tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b)$. Allora se vale*

$$\lim_{c\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0,$$

le funzioni f e g o sono entrambe integrabili in senso improprio in $[a,b)$ o sono entrambe non integrabili.

Come nel caso delle serie, se il limite ℓ è zero o se è $+\infty$ valgono solo alcune delle implicazioni...

Teorema 2.5. *(Criterio del confronto asintotico – II parte) Siano $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,c]$ per ogni $c \in (a,b)$ e tali che $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b)$.*

(i) Se

$$\lim_{c\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

allora se f non è integrabile, neppure g lo è; se g è integrabile, anche f lo è.

(ii) Se

$$\lim_{c\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

allora se g non è integrabile, neppure f lo è; se f è integrabile, anche g lo è.

Passiamo in rassegna qualche esempio.

Esercizio 2.6. *L'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \text{con} \quad k^2 < 1,$$

è convergente?

Dato che la funzione integranda diverge per $x \to 1^+$, bisogna stabilire se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Per utilizzare uno dei Teoremi di confronto asintotico, dobbiamo confrontare la funzione integranda con una funzione (più semplice) per cui si sappia stabilire l'integrabilità. Procediamo prima in maniera euristica: per $x \approx 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Quindi per $x \approx 1$, la funzione integranda si comporta (a meno di una costante moltiplicativa non nulla) come la funzione $1/\sqrt{1-x}$. Dato che, con il cambio di variabile $y = 1-x$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy$$

la funzione $1/\sqrt{1-x}$ è integrabile in $[0,1)$. Tutto fa sospettare che anche l'integrale di partenza sia anch'esso integrabile. Come dimostrarlo? Semplice, dato che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \frac{1/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1/\sqrt{1-x}} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}\end{aligned}$$

e dato che la funzione $1/\sqrt{1-x}$ è integrabile in $[0,1)$, grazie al Criterio di confronto, anche la funzione di partenza è integrabile.

Esercizio 2.7. *L'integrale improprio*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx$$

è convergente o è divergente?

Dato che l'integrale è esteso ad un dominio illimitato, bisogna studiare i due limiti

$$\lim_{L\to+\infty} \int_{-L}^0 e^{-x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-x^2}\, dx.$$

Con il cambio di variabili $y = -x$

$$\int_{-L}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{L} e^{-y^2}\,dy,$$

quindi i due limiti sono in realtà lo stesso! Per verificare l'integrabilità di e^{-x^2} in $[0,\infty)$ basta osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2} = \lim_{t\to+\infty}(1+t)e^{-t} = 0.$$

Grazie al Criterio di confronto asintotico II, dato che la funzione $1/(1+x^2)$ è integrabile in $[0,\infty)$, anche la funzione e^{-x^2} lo è.

I criteri di confronto asintotico sono utili quando si conosca il comportamento di un certo numero di "casi campione". Nel caso dell'integrazione impropria molti casi si risolvono ricorrendo alle funzioni del tipo $1/(b-x)^\alpha$ nel caso di integrali in $[a,b)$, del tipo $1/(x-a)^\alpha$ nel caso di integrali in $(a,b]$ e del tipo $1/x^\alpha$ nel caso di integrali in semirette del tipo $[a,+\infty)$ con $a>0$ o del tipo $(-\infty,b]$ con $b<0$. I calcoli fatti negli esempi ad inizio Capitolo mostrano che la *soglia critica* per l'integrabilità di singolarità di tipo potenza è $\alpha = 1$ sia al finito che all'infinito[1]: schematicamente

$$\frac{1}{(b-x)^\alpha} \quad \text{è integrabile in } [a,b) \text{ se e solo se } \alpha < 1;$$

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha} \quad \text{è integrabile in } (a,b] \text{ se e solo se } \alpha < 1;$$

$$\frac{1}{x^\alpha} \quad \text{è integrabile in } [a,+\infty) \quad (a>0) \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1.$$

$$\frac{1}{(-x)^\alpha} \quad \text{è integrabile in } (-\infty,b] \quad (b<0) \qquad \text{se e solo se } \alpha > 1.$$

Quindi, se si vuole determinare l'integrabilità in $[a,+\infty)$ di una funzione $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ per cui si sia in possesso di un'informazione del tipo

$$\exists\, \ell > 0,\ \alpha > 0 \qquad \text{tale che } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \ell,$$

è un gioco da ragazzi: se $\alpha > 1$ la funzione è integrabile, altrimenti no. Ad esempio, la funzione

$$\frac{1 + 2\sin(\arctan x) - e^{-x}}{1+x^2}$$

è integrabile in $[0,+\infty)$. Infatti $2 > 1$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[1 + 2\sin(\arctan x) - e^{-x}]/(1+x^2)}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2\, \frac{1 + 2\sin(\arctan x) - e^{-x}}{1+x^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 2\sin(\arctan x) - e^{-x}}{x^{-2}+1} = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0.$$

Analogamente per gli altri casi.

[1] La soglia critica è 1 perché stiamo lavorando con funzioni di <u>una</u> variabile, cioè in dimensione 1.

Per concludere un ultimo criterio che si è già visto in precedenza. Alla luce della definizione di integrazione in senso improprio, possiamo enunciare di nuovo, in modo solo leggermente diverso, il criterio integrale per le serie numeriche (vedi Cap.2).

TEOREMA 2.8. *Sia a_k una successione decrescente e infinitesima. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente tale che $f(k) = a_k$ per ogni $k \geq 1$. Allora*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty.$$

Il criterio integrale è particolarmente utile nella direzione che va dall'esistenza dell'integrale improprio alla convergenza della serie. Infatti per gli integrali definiti, grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo, c'è una strategia che ne permette il calcolo esplicito in un certo numero di situazioni. Lo stesso non è vero per le serie numeriche. Ad esempio, consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Si ha

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L \to +\infty} \int_2^{L} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{L \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln L} \frac{dy}{y} = +\infty,$$

e quindi anche la serie è divergente (come si vede che $1/x \ln x$ è decrescente?).

La funzione Gamma. Un esempio di funzione definita tramite un integrale improprio è la FUNZIONE GAMMA:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{x-1}\, dy \qquad x > 0.$$

Attenzione a non fare confusione: per ogni fissato $x \geq 0$, l'integrale è nella variabile y.

Per la verifica della convergenza bisogna dividere l'integrale in due parti:

$$\int_0^{1} e^{-y} y^{x-1}\, dy \qquad \text{e} \qquad \int_1^{\infty} e^{-y} y^{x-1}\, dy$$

Il primo integrale è improprio se e solo se $x \in (0, 1)$. Per dimostrarne la convergenza basta notare che

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{e^{-y} y^{x-1}}{1/y^{1-x}} = 1,$$

quindi, dato che

$$\int_0^{1} \frac{dy}{y^{1-x}} < +\infty \qquad \forall\, x \in (0, 1),$$

la funzione $e^{-y} y^{x-1}$ è integrabile in $(0, 1]$.

Per l'altro integrale, si può fare ricorso al Criterio di confronto asintotico II. Dato che, per ogni $x \geq 0$,

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y} y^{x-1}}{1/y^2} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} y^{x+1} = 0,$$

l'integrabilità di $1/y^2$ in $[1, +\infty)$ implica quella di $e^{-y} y^{x-1}$.

La funzione Γ gode di una proprietà interessante: grazie ad una integrazione per parti

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-y} y^x \, dy = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-y} y^x \, dy = \lim_{L\to+\infty} \left\{ -e^{-L} L^x + x \int_0^L e^{-y} y^{x-1} \, dy \right\}$$
$$= \lim_{L\to+\infty} -e^{-L+x\ln L} + x \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-y} y^{x-1} \, dy = x\,\Gamma(x)$$

In particolare, se si calcola la funzione Γ sui naturali si ottiene

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n-1) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-2) = \cdots = n\,(n-1)\,\ldots\,3\cdot 2\Gamma(1) = n!\,\Gamma(1).$$

Dato che

$$\Gamma(1) = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L e^{-y} \, dy = \lim_{L\to+\infty} \left(1 - e^{-L}\right) = 1,$$

si ottiene una maniera per esprimere il fattoriale tramite un integrale:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-y}\, y^n \, dy \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3. Funzioni di segno qualsiasi

Passiamo ora a considerare funzioni di segno qualsiasi. Ancora una volta, la situazione è simile a quella delle serie, per cui, si ricordi, si è visto che il concetto di convergenza semplice (cioè come limite di somme di n termini) non permette di estendere molte delle proprietà tanto amate per la somma di un numero finito di termini. Iniziamo con un esempio che mostra come, anche nel caso degli integrali impropri, siano presenti tutti i problemi relativi alle serie a segno variabile.

Esempio 3.1. Consideriamo una funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente. Nell'intervallo $[0,2]$ poniamo

$$f(0) = f(2) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 1,$$

poi definiamo la funzione nei restanti punti, in modo che sia data da un polinomio di primo grado in $[0,1]$ e in $[1,2]$ (ovviamente non lo stesso polinomio!). Nell'intervallo $[2,4]$ poniamo

$$f(2) = f(4) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(3) = -\frac{1}{2},$$

e colleghiamo i punti con tratti lineari. In generale, definiamo

$$f(2n) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad f(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Il grafico è in Figura 3. Qual'è il contributo dell'integrale relativo all'intervallo $[2n, 2n+2]$? Dato che la zona delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle x in ciascuno di questi intervalli rappresenta un triangolo con base di lunghezza 2 e altezza pari al valore della funzione nel punto $x = 2n+1$,

$$\int_{2n}^{2n+2} f(x)\, dx = \frac{1}{2}\, 2 \cdot f(2n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

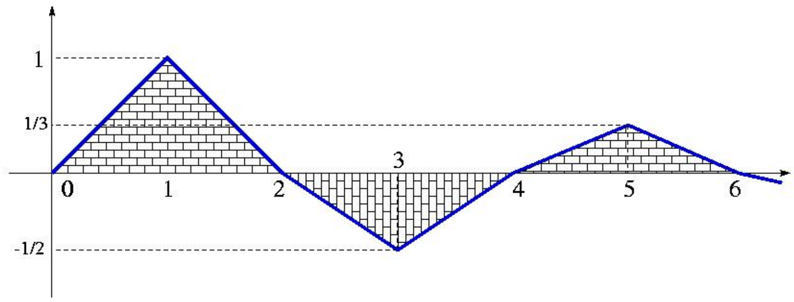

FIGURA 3.

Quindi

$$\int_0^{2n+2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{2k}^{2k+2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}. \tag{3.1}$$

Di questa serie sappiamo già tutto: è semplicemente convergente, ma divergente in valore assoluto! La prima delle due affermazioni garantisce che il limite per $n \to +\infty$ dell'integrale di f in $[0, 2n+2]$ esiste, cioè la funzione è integrabile in senso improprio e il valore dell'integrale è dato dalla somma della serie

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Il fatto che la serie in (3.1) non sia assolutamente convergente implica la validità del Teorema di Riemann – II parte (vedi Note di Analisi Matematica I, Capitolo 2): riordinando la serie e sommando in ordine diverso è possibile ottenere un qualunque numero reale, o $\pm\infty$, o persino la non convergenza della serie! In termini di integrali, questo significa che se si cambia l'ordine con cui si sommano i vari contributi il valore finale è diverso! Ad esempio, se si sommano prima tutti i contributi positivi (quelli relativi agli intervalli $[2n, 2n+2]$ con n pari) si ottiene il valore $+\infty$. Se si sommano prima tutti quelli negativi, si ottiene $-\infty$.

OSSERVAZIONE 3.2. *Si noti che, nell'esempio precedente, f è integrabile su $A = [0, +\infty)$, tuttavia non è integrabile su $B \subset A$ definito da*

$$B = \{x \in [0, +\infty) \,:\, f(x) \geq 0\},$$

a causa del fatto che la serie armonica è divergente. Questo non contraddice la nostra costruzione dell'integrale improprio, dato che B non è unione finita di intervalli.

La situazione è abbastanza sconfortante: la nostra definizione di integrale improprio ha il difetto evidente di essere troppo rigida: non ci è permesso scegliere l'ordine con cui sommare i vari contributi. Ma ormai ci siamo già temprati grazie allo studio delle serie e sappiamo che il problema in cui siamo incappati discende dal fatto che stiamo lavorando con funzioni a segno variabile. Per funzioni positive, è possibile sommare nell'ordine che si vuole e il risultato non cambia. Seguendo l'esperienza delle serie, introduciamo un nuovo concetto di convergenza per integrali impropri.

DEFINIZIONE 3.3. *Una funzione f ammette* INTEGRALE IMPROPRIO ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE *se la funzione $|f|$ è integrabile in senso improprio.*

Esattamente come nel caso delle serie, se una funzione f ha integrale improprio assolutamente convergente, allora è integrabile anche in senso improprio (omettiamo la dimostrazione). Il viceversa invece non è vero, come dimostrato dall'esempio dato al principio di questa Sezione (invece, nel caso dell'integrale di Riemann, se f è integrabile, anche $|f|$ lo è!).

Inoltre, sempre nel caso di convergenza assoluta, si può calcolare l'integrale seguendo l'ordine che più ci aggrada: il risultato non cambia. Scrivere in maniera precisa quest'affermazione è un po' complicato. Limitiamoci, per semplicità, al caso di una funzione $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $0 < a < b < +\infty$. Se scegliamo $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ successione di intervalli chiusi e limitati tali che

$$I_n \subset I_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n = (0, \infty),$$

allora

$$|f| \text{ integrabile in } (0, \infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{I_n} f(x)\, dx = \lim_{L \to +\infty} \int_0^L f(x)\, dx =: \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

E' importante sottolineare ancora una volta che nel caso in cui la funzione $|f|$ <u>non</u> sia integrabile, lo stesso procedimento non dà luogo allo stesso risultato: successioni di intervalli diverse, danno luogo a limiti diversi. In questo caso, per determinare l'esistenza o la non esistenza dell'integrale in senso improprio, occorre seguire passo passo la definizione che abbiamo dato ad inizio Capitolo.

Integrale di Dirichlet. Un altro esempio di funzione f integrabile in senso improprio, ma non in valore assoluto, è

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad x \in (0, \infty).$$

Qui i problemi sono due: la funzione non è definita in $x = 0$ e il dominio in cui è considerata è illimitato. Il primo dei due problemi è facilmente risolto: dato che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si può estendere la funzione per continuità, ponendo $f(0) = 1$. Resta il problema del dominio illimitato.

Mostriamo, prima di tutto, che $\dfrac{\sin x}{x}$ *è integrabile in* $[1, \infty)$. Infatti, per ogni $L > 1$,

$$\int_1^L \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_1^L \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(-\cos x)\, dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^L - \int_1^L \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

L'integrale finale esiste dato che la funzione $\cos x/x^2$ è assolutamente integrabile in $[1,+\infty)$

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\lim_{L\to+\infty} \int_1^L \frac{\sin x}{x}\,dx = -\cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Sostanzialmente l'integrale improprio esiste per lo stesso motivo dell'Esempio 3.1: la presenza del termine $\sin x$ provoca un cambio un cambio di segno (con periodicità π), mentre il termine $1/x$ rende i termini infinitesimi all'aumentare di x. Insomma, una struttura simile in tutto e per tutto a quella delle serie a segni alterni soddisfacenti il criterio di Leibniz... Il calcolo esplicito del valore dell'integrale improprio è possibile (il risultato è $\pi/2$), ma richiede un bel po' di lavoro e di conoscenze in più[2].

Mostriamo ora che $|\sin x|/x$ *non è integrabile in* $[1,\infty)$. Per $k \in \mathbb{N}$, consideriamo l'integrale di $|\sin x|/x$ in $[k\pi,(k+1)\pi]$. Per la monotonìa di $1/x$, vale la stima dal basso

$$\begin{aligned}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x\,dx \\ &= \frac{(-1)^k}{(k+1)\pi}\left[\cos(k\pi) - \cos((k+1)\pi)\right] = \frac{(-1)^k\cdot(-1)^k\cdot 2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}\end{aligned}$$

Sommando su k, si ha

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Dato che la serie armonica è divergente, ne segue che il limite è divergente e quindi la funzione $|\sin x|/x$ non è integrabile in $(0,+\infty)$.

(!)Esercizio 3.4. *Sia $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$. Dimostrare che esiste l'integrale improprio*

$$\int_0^\infty f(x)\,\sin x\,dx.$$

Integrali di Fresnel. Un altro esempio di integrali impropri sono dati dagli *integrali di Fresnel*, che emergono nella teoria della diffrazione della luce:

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

[2]Si consulti, ad esempio, R.Courant, F.John "Introduction to Calculus and Analysis, I", Springer, sez. 8.4c. p.589.

Prendiamo in considerazione l'integrale di $\sin(x^2)$ in $[1, L]$. Utilizzando la sostituzione $t = x^2$ e integrando per parti,

$$\int_1^L \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{d}{dt}(-\cos t)\,dt$$

$$= -\frac{\cos\sqrt{L}}{2\sqrt{L}} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{L}} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,dx.$$

L'ultimo integrale è convergente in valore assoluto, dato che

$$\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{t^{3/2}} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

e $1/t^{3/2}$ è integrabile in $[1, +\infty)$. Quindi, passando al limite per $L \to +\infty$, si deduce che la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile in $[1, +\infty)$, quindi anche in $[0, +\infty)$, e vale

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{4}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx.$$

Un fatto eclatante espresso da questo esempio è che *esistono funzioni $f = f(x)$ integrabili in senso improprio in $(0, \infty)$ che non sono infinitesime per $x \to +\infty$!* Nel caso in cui $f : [0, +\infty)$ abbia limite diverso da 0 per $x \to +\infty$, la funzione non sarà mai integrabile in $(0, \infty)$ (sai dimostrare questa affermazione?).

(!)Esercizio 3.5. *Dimostrare che esistono funzioni $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ non negative e integrabili in $[0, +\infty)$ che non tendono a zero per $x \to +\infty$. Ne esistono che siano anche funzioni continue?*